۱-فرض کنید X یک متغیر تصادفی در فاصله $[0,1]$ باشد. می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0 : X \sim U(0,1) \qquad v.s. \qquad H_1 : X \sim Beta(2,1)$$

الف)پرتوانترین آزمون سطح α رابدست آورید ؟

ب)نمودار تابع آزمون $N = \{(\alpha_\phi, \beta_\phi^*)\}$ را رسم نمایید ؟

حل:

می دانیم که توزیع $Beta(1,1)$ همان توزیع یکنواخت روی فاصله (۱و۰) می باشد، پس :

$$\frac{f_{H_1}(x)}{f_{H_0}(x)} = \frac{f_{2,1}(x)}{f_{1,1}(x)} = 2x$$

حال با استفاده از لم نیمن- پیرسون

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 2x > c \\ 0 & 2x \le c \end{cases} \Leftrightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & x > k \\ 0 & x \le k \end{cases}$$

که در آن k یک مقدار ثابت می باشد ، بنابراین k را طوری انتخاب می کنیم که $E_{H_0}[\phi(X)] = \alpha$ باشد. در نتیجه داریم :

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(X > k) = \int_k^1 dx = 1 - k$$
$$\Rightarrow 1 - k = \alpha \Rightarrow k = \underline{1 - \alpha}$$

بنابراین تابع آزمون بصورت $\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > 1-\alpha \\ 0 & x \le 1-\alpha \end{cases}$ می باشد.

ب)برای رسم نمودار مجموعه ی N را تشکیل می دهیم :

i)نقطه $(\cdot,\cdot) \in N$ ، $(۱,۱) \in N$، و مجموعه ی Nنسبت به نقطه ی $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$متقارن است، در ضمن Nیک مجموعه بسته ومحدب است . از طرفی با توجه به اینکه پرتوانترین آزمون در سطح α_0 پوسته بالایی N را تشکیل می دهد، بنابراین اگر نقاط بدست آمده از پرتوانترین آزمون را رسم کنیم و با استفاده از تقارن N نسبت به نقطه ی $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$، پوسته پائینی N را تکمیل کنیم آنگاه N بطور کامل مشخص می شود.

بطور مثال چند نقطه در N محاسبه کرده ایم:

$$\alpha_\phi = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(X > k) = \int_k^1 dx = 1 - k$$

$$\beta^*\phi = E_{H_1}(\phi(X)) = P_{H_1}(X > k) = \int_k^1 2x dx = 1 - k^2$$

α	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱
k	۱	۰/۷۵	۰/۵	۰/۲۵	۰
β^*	۰	۰/۴۳۷۵	۰/۷۵	۰/۹۳۷۵	۱

۲-فرض کنید $X \sim C(\theta,۱)$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0 : \theta = 0 \qquad v.s. \qquad H_1 : \theta = 1$$

نشان دهید $\psi(x) = I_{[1,3]}(x)$ پرتوان ترین آزمون سطح خودش است.

حل :می دانیم که

$$f_\theta(x) = \frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

و در نتیجه

$$\frac{f_{H_1}(x)}{f_{H_0}(x)} = \frac{1+x^2}{1+(x-1)^2} = \lambda(x)$$

برای تشخیص صعودی و نزولی بودن تابع $\lambda(x)$ ریشه های مشتق را یافته و تعیین علامت می کنیم :

$$\lambda'(x) = \frac{2x^2-2x-2}{[1+(x-1)^2]^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
λ'	$-$		$+$		$-$

$$\lambda(x) = \begin{cases} <0 & x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ >0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ <0 & x \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

از طرفی $\frac{f_{H_1}(1)}{f_{H_0}(1)} = \frac{f_{H_1}(3)}{f_{H_0}(3)} = 2$. پس وقتی فرض صفر رد می شود که:

$\frac{f_{H_1}(x)}{f_{H_0}(x)} > 2$. این مورد وقتی اتفاق می افتد که ۱ < x < ۳ باشد. از طرفی

$$\alpha_0 = P_{H_0}(1 < x < 3) = \int_1^3 \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}tg^{-1}(x)\Big|_1^3 = \frac{1}{\pi}(tg^{-1}(3) - tg^{-1}(1))$$

پس $\psi(x)$ پرتوانترین آزمون در سطح α_0 می باشد.

اما توجه داشت که $\frac{f_{\theta=1}(1)}{f_{\theta=0}(1)} = \frac{f_{\theta=1}(3)}{f_{\theta=0}(3)}$ برای $\theta \neq 1$برقرار نیست. مثلا برای

$\theta = 2$بررسی کنید . آیا می توان نتیجه گرفت که ناحیه بحرانی 1<x<3برای مقادیر

دیگر θ پرتوانترین نیست ؟

۳-فرض کنید $X_1,\dots,X_{10}$ یک نمونه ی تصادفی ۱۰تایی از توزیع $N(\theta_1,\theta_2)$ باشد

می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0 : \theta_1 = 1, \theta_2 = 4 \quad v.s. \quad H_1 : \theta_1 = 4, \theta_2 = 1$$

پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ را بدست آورید؟

حل:

$$\frac{f_1(\underline{x})}{f_0(\underline{x})}=\frac{(2\pi)^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{10}(x_i-4)^2\right\}}{(8\pi)^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{8}\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2\right\}}=(\frac{1}{4})^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left((x_i-4)^2-\frac{(x_i-1)^2}{4}\right)\right\}$$

$$=(\frac{1}{4})^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left\{\left(x_i-4-\frac{x_i-1}{2}\right)\left(x_i-4+\frac{x_i-1}{2}\right)\right\}\right\}$$

$$=(\frac{1}{4})^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left\{\left(\frac{x_i-7}{2}\right)\left(\frac{3x_i-9}{2}\right)\right\}\right\}=(\frac{1}{4})^{\frac{-10}{2}}\exp\left\{\frac{-3}{4}\sum_{i=1}^{10}\{(x_i-7)(x_i-3)\}\right\}$$

بنا بر لم نیمن- پیرسون داریم :

$$\frac{f_1(\underline{x})}{f_0(\underline{x})}\rangle K\Leftrightarrow T(x)\langle K\Rightarrow\phi(x)=\begin{cases}1 & T(x)<K\\0 & T(x)\geq K\end{cases}$$

کـه در آن $T(x)=\sum_{i=1}^{10}(x_i-7)(x_i-3)$. بـه سـادگی مـی تـوان نـشان داد کـه

$T(x)=\sum_{i=1}^{10}(x_i-7)(x_i-3)=\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2$، در نتیجه داریم

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2<K\\0 & \sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2\geq K\end{cases}$$

از طرفی تحت فرض صفر $X_i - 5 \sim N(-4,4)$ ، بنابراین $\frac{x_i-۵}{۲}\sim N(-۲,۱)$

$$\Rightarrow(\frac{X_i-5}{2})^2\sim\chi^2(1,2)$$

بنابراین

$$\alpha=E_{H_0}(\phi(X))=P_{H_0}(T(X)<K)\Rightarrow C=\chi^2_{1-\alpha}(10,20)$$

که $\chi^2_{1-\alpha}(10,20)$ توزیع کای- دو غیرمرکزی می باشد.

۴- فرض کنید $X \sim U(0,\theta)$ باشد می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم :

$$H_. : \theta = 17 \qquad v.s. \quad H_1 : \theta = 93$$

پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0 \cdot 37$ را بدست آورید ؟

حل :

بر اساس لم نیمن- پیرسون داریم

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{93} I_{(0,93)}(x) > k \frac{1}{17} I_{(0,17)}(x) \\ 0 & \frac{1}{93} I_{(0,93)}(x) \le k \frac{1}{17} I_{(0,17)}(x) \end{cases} \Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & x > k \\ 0 & x \le k \end{cases}$$

چون آزمون در سطح $\alpha = 0.37$ است، بنابراین :

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(X > k) = \int_k^{17} \frac{1}{17} dx = 17 - k$$

$$\frac{17 - k}{17} = 0.37 \Rightarrow 1 - \frac{k}{17} = 0.37$$

$$\frac{k}{17} = 0.63 \Rightarrow k = 10.71$$

۵- برای آزمون زیر مجموعه N را رسم کنید

$$H_0 : X \sim U(0,1) \qquad v.s. \qquad H_1 : X \sim U\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

حل :

بر اساس لم نیمن – پیرسون داریم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & I_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x)>kI_{(0,1)}(x)\\ 0 & I_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x)\le kI_{(0,1)}(x)\end{cases}$$

با توجه توضیحی که در تمرین ۱ رائه شد کافی است که α_ϕ و β_ϕ^* را تعیین کنیم :

$$\alpha_\phi=E_{H_0}(\phi(X))=P_{H_0}(X>k)=\int_k^1 dx=1-k$$

$$\beta^*\phi=E_{H_1}(\phi(X))=P_{H_1}(X>k)=\int_k^{1.5} dx=1.5-k$$

۶- فرض کنید X یک متغیر تـصادفی پیوسـته باشـد . در هـر یـک از آزمـون هـای زیـر پرتوانترین آزمون سطح $\alpha=0.05$ را بدست آورده و توان آزمون را تعیین کنید و نمـودار مجموعه N را رسم کنید .

i) $H_0: X\sim N(0,1)\quad v.s.\quad H_1: X\sim C(0,1)$

ii) $H_0: X\sim U(0,1)\quad v.s.\quad H_1: X\sim Beta(1,2)$

iii) $H_0: X\sim N(0,1)\quad v.s.\quad H_1: X\sim LP(0,1,1)$

iv) $H_0: X\sim U(0,1)\quad v.s.\quad H_1: X\sim Beta(4,1)$

حل:

i) بر اساس لم نیمن- پیرسون داریم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}>k\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\\ 0 & \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\le k\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\end{cases}$$

تابع چگالی متغیر تصادفی X راتحت فرض صفر و فرض مقابل بصورت زیر داریم:

$$f_{H_0}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f_{H_1}(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

آماره ی آزمون را بصورت زیر تشکیل می دهیم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+x^2)}>c\\ 0 & \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+x^2)}\le c\end{cases}\xrightarrow{y=x^2}\phi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{e^{\frac{y}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+y)}>c\\ 0 & \dfrac{e^{\frac{y}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+y)}\le c\end{cases}$$

فرض کنید $g(y)=\frac{e^{\frac{y}{2}}}{1+y}$. با گرفتن لگاریتم و مشتقگیری نسبت به y از طرفین

تساوی داریم :

$$Ln(g(y))=\frac{y}{2}-Ln(1+y)$$

$$[Ln(g(y))]'=1-\frac{1}{1+y}\qquad\to\frac{g'(y)}{g(y)}=1-\frac{1}{(1+y)}\Rightarrow g'(y)=\frac{y}{(y+1)}\frac{e^y}{(1+y)}>0$$

در نتیجه تابع $g(y)$ نسبت به y صعودی است بنابراین

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x^2>k\\ 0 & x^2\le k\end{cases}$$

که در آن k یک مقدار ثابت است. حال k را چنان پیدا می کنیم که $E_{H_0}(\phi(X))=0.05$ در نتیجه داریم :

$$E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}\left(X^2 > k\right) = P_{H_0}\left(\chi^2_{(1)} > k\right) = 0.05 \Rightarrow k = \chi^2_{(1;0.95)}$$

برای محاسبه توان آزمون داریم :

$$\beta = E_{H_1}(1-\phi(X)) = P_{H_1}\left(X^2 \le k\right) = P_{H_1}\left(-\sqrt{k} < X < \sqrt{k}\right)$$
$$= \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi} Arctgx\Big|_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \frac{2}{\pi} Arctg\sqrt{k}$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{2}{\pi} Arctg\sqrt{\chi^2_{(1;0.95)}}$$

در نتیجه :

$$\beta^* = 1-\beta = 1-\frac{2}{\pi} Arctg\sqrt{\chi^2_{(1,0.95)}}$$

ii)تابع آزمون را تشکیل می دهیم

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 2(1-x) > k \\ 0 & 2(1-x) \le k \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x < k \\ 0 & x \ge k \end{cases}$$

با توجه به اینکه آزمون در سطح $\alpha = 0.05$ است بنابراین

$$E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(X < k) = \int_0^k dx = 0.05 \Rightarrow k = 0.05$$

برای بدست آوردن توان آزمون ابتدا β را محاسبه می نماییم

$$\beta = E_{H_1}(1-\phi(X)) = P_{H_1}(X \ge k) = \int_k^1 2(1-x)dx = (1-k)^2$$

وبا جایگذاری $k = 0.05$ ، $\beta = 0.9025$ در نتیجه همینطور $\beta^* = 0.0975$

iii) تابع چگالی تحت فرض صفر و فرض مقابل به صورت زیر داریم :

$$f_{H_0}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f_{H_1}(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

آنگاه بنا بر لم نیمن- پیرسون داریم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{2}e^{-|x|}>\frac{k}{2\pi}e^{\frac{-1}{2}x^2}\\ 0 & \frac{1}{2}e^{-|x|}<\frac{k}{2\pi}e^{\frac{-1}{2}x^2}\end{cases}\rightarrow\phi(x)=\begin{cases}1 & e^{-|x|+\frac{1}{2}x^2}>k\\ 0 & e^{-|x|+\frac{1}{2}x^2}<k\end{cases}$$

$y=-|x|$ را انتخاب و $g(y)=e^{y+\frac{1}{2}y^2}$ را تعریف می کنیم. آنگاه با گرفتن لگاریتم و مشتقگیری نسبت به y از طرفین تساوی داریم :

$$Lng(y)=y+\frac{1}{2}y^2$$

$$\left(Lng(y)\right)'=\frac{g'(y)}{g(y)}=(1+y)\Rightarrow g'(y)=(1+y)g(y)>\circ$$

$$\frac{g'(y)}{g(y)}=(1+y)\Rightarrow g'(y)=(1+y)g(y)>\circ$$

می بینیم که تابع g(y) نسبت به y صعودی است، بنابراین

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & -|x|>k\\ 0 & -|x|\le k\end{cases}\Rightarrow\phi(x)=\begin{cases}1 & |x|<k\\ 0 & |x|\ge k\end{cases}$$

k را طوری انتخاب می کنیم که $E_{H_0}(\phi(X))=0.05$ در نتیجه داریم :

$$\alpha=P_{H_0}(|X|<k)=P_{H_0}(-k<X<k)=2\varphi(k)-1=0.05$$

$$\Rightarrow\quad\varphi(k)=0.525\Rightarrow k=z_{0.525}$$

که در آن φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می باشد. به راحتی بدست می آید

که $\beta^* = 1 - e^{-z_{0.525}}$.

iv) بنا بر لم نیمن – پیرسون داریم :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 4x^3\, I_{(0,1)}(x) > kI_{(0,1)}(x) \\ 0 & 4x^3 I_{(0,1)}(x) \le kI_{(0,1)}(x) \end{cases} \Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & x > k \\ 0 & x \le k \end{cases}$$

به راحتی نتیجه می شود که : $\beta^* = 0.8145$

7-فرض کنید $X \sim Ge(p)$ باشد. می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم .

$$H_0 : p = 0.1 \quad v.s. \qquad H_1 : p = 0.2$$

الف)پر توانترین آزمون یکنواخت سطح۰/۱۹را بدست آورید ؟

ب) پر توانترین آزمون یکنواخت سطح۰/۲۲را بدست آورید ؟

حل:

تابع چگالی X را بصورت زیر داریم

$$f_p(x) = p(1-p)^x \qquad x = 0,1,2,...$$

طبق لم نیمن – پیرسون داریم :

$$\frac{f_{p=0.2}(x)}{f_{p=0.1}(x)} = \frac{0.2(0.8)^x}{0.1(0.9)^x} > k \Rightarrow (\frac{8}{9})^x > k_1 \Rightarrow x < c$$

در نتیجه آماره ی آزمون را بصورت زیر می توان تشکیل داد:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < [c] \\ \gamma & x = [c] \\ 0 & x > [c] \end{cases}$$

برای بدست آوردن مقدار c در نظر می گیریم که ابتدا سطح آزمون را مقدار ۰/۱۹ سپس ۰/۲۲ داده شده است بنابراین

$$0.19 = E_{H_0}(\phi(x)) = P_{p=0.1}(x < [c]) + P_{p=0.1}(x = [c])$$

تحت فرض صفر می توان نوشت :

$$f(x) = 0.1(0.9)^X \qquad x = 0,1,\ldots$$

چون $P_{\theta_0}(x<2) = 0.19$ یعنی این یعنی تابع آزمون

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

در سطح ۱۹/ پرتوانترین آزمون می باشد.

در ادامه باید [c] طوری انتخاب شود که $E_{H_0}(\phi(x)) = 0.22$. از طرفی چون $P_{\theta_0}(x<3) = 0.271$، در نتیجه $P_{\theta_0}(x=2) = 0.081$ و برای حصول اندازه آزمون $\alpha = 0.22$ باید $[c] = 2$ و

$$0.22 = 0.19 + \gamma\, P(x=2) \Rightarrow \gamma = \frac{0.22 - 0.19}{0.081} = 0.3704$$

اختیار شوند، یعنی پرتوانترین آزمون در سطح $\alpha = 0.22$ برای آزمون به صورت زیر است :

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ 0.3704 & x = 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

۸–فرض کنید $X \sim HG(10,\theta,3)$ باشد.می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم .

$$H_0: \theta = 5 \qquad v.s. \qquad H_1: \ \theta = 6$$

الف)اگر X=2 مشاهده شود،فرض H_0 را رد می کنیم احتمال خطاهای اول و دوم را به دست آورید .

ب)پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ را به دست آورید.

ج)نمودار N را رسم کنید.

حل:

الف)با توجه به فرضیات مساله ، آماره ی آزمون را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & x \neq 2 \end{cases}$$

پس خطای نوع اول و دوم را به صورت زیر داریم :

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(X = 2) = \frac{5}{12}$$

$$\beta = E_{H_1}(1 - \phi(X)) = P_{H_1}(X \neq 2) = 1 - P_{H_0}(X = 2) = \frac{1}{2}$$

ب)به سادگی می توان نشان داد که در توزیع فوق هندسی اگر $\theta_0 < \theta_1$ آنگاه نسبت $f_{\theta_1}/f_{\theta_0}$ تابعی غیر نزولی از T(X)=X می باشد. در نتیجه داریم :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > [c] \\ \gamma & x = [c] \\ 0 & x < [c] \end{cases}$$

۹-فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد.در هر یک از حالات زیر پرتوانترین آزمون سطح α را برای آزمون

$$H_0 : X \sim f_0 \qquad vs \qquad H_1 : X \sim f_1$$

به دست آورده و نمودار N را رسم کنید.

الف)

x	1	2	3	4
$f_0(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$f_1(x)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$

ب)

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f_0(x)$	۰/۹۴	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
$f_1(x)$	۰/۷۹	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶

ج)

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f_0(x)$	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۷	۰/۰۷۷
$f_1(x)$	۰/۰۳	۰/۰۹	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۱۸	۰/۳

د)

x	0	1	2	3	4	5
$f_0(x)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.5
$f_1(x)$	0.1	0.15	0.25	0.15	0.25	0.1

ه)

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
$f_0(x)$	/۰۱	/۰۲	/۰۳	/۰۴	/۰۵	/۰۶	/۰۷	/۲۲	/۲۵	/۲۵
$f_1(x)$	/۰۴	/۰۴	/۰۹	/۱۶	/۱۲	/۲	/۰۸	/۰۵	/۰۵	/۰۵

حل:

برای نمونه قسمت (الف) را حل می نماییم و مابقی مانند الف حل می شوند.

چون مقدار α مشخص نمی باشد بنابراین مقادیر مختلفی برای α مشخص می نماییم .

ابتدا فرض کنید $\alpha = 0.25$ باشد. دراین صورت واضح است که چهار آماره آزمون غیر تصادفی در همین سطح خواهیم داشت، طبق تعریف پرتوانترین آزمون، آزمونی را انتخاب می کنیم که توان بیشتری را داشته باشد. در نتیجه داریم :

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

حال پرتوانترین آزمون را در سطح $\alpha = 0.29$ بدست می آوریم :

آماره آزمون غیر تصادفی

$$\phi_2(x)=\begin{cases}1 & x=1,4\\ 0 & x=2,3\end{cases}$$

پرتـوانترین آزمـون در سـطح $\alpha=0.5$ مـی باشـد. در نتیجـه آزمـون پرتـوان در سـطح

$\alpha=0.29$ بین دو آزمون $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ قرار می گیرد و بصورت

$$\phi^*(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ \gamma & x=4\\ 0 & x=2,3\end{cases}$$

خواهد بود. در نتیجه برای حصول به اندازه آزمون $\alpha=0.5$ باید

$$E_{H_0}(\phi^*(X))=.29=.25+\lambda P(X=4)\Rightarrow\gamma=\frac{0.29-0.25}{0.25}=0.16$$

اختیار شود ، پس

$$\phi^*(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0.16 & x=4\\ 0 & x=2,3\end{cases}$$

درنهایت با در گرفتن حالتهای مختلفی برای α می توان مساله را حل نمود.

۱۰- فرض کنید X_1,X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $Beta(\theta,1)$ باشد

پرتوانترین آزمون سطح $\alpha=\frac{1}{2}(1-Ln2)$ را برای آزمونهای زیر بدست آورید

الف) $H_0:\theta=1 \quad v.s. \quad H_1:\theta=2$

ب) $H_0:\theta=2 \quad v.s. \quad H_1:\theta=1$

حل :

الف)برای بدست آوردن پرتوانترین آزمون در سطح عنوان شده داریم

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \prod_{i=1}^{2} f_{\theta_1}(x) > k \prod_{i=1}^{2} f_{\theta_0}(x)\\ 0 & \prod_{i=1}^{2} f_{\theta_1}(x) < k \prod_{i=1}^{2} f_{\theta_0}(x)\end{cases}$$

می دانیم که : $f_\theta(x)=\theta x^\theta \quad ; \quad 0<x<1$

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 4(x_1x_2)^2 > k(x_1x_2)\\ 0 & 4(x_1x_2)^2 \le k(x_1x_2)\end{cases}$$

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x_1x_2 > k_1\\ 0 & x_1x_2 \le k_1\end{cases} \rightarrow \phi(x)=\begin{cases}1 & -\sum_{i=1}^{2} Lnx_i < c\\ 0 & -\sum_{i=1}^{2} Lnx_i \ge c\end{cases}$$

برای بدست آوردن مقدار c می توانیم براساس مقدار α (خطای نـوع اول)آن را محاسـبه کنیم

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(-\sum_{i=1}^{2} LnX_i < c) \qquad *$$

حال تابع چگالی $Y=-\sum_{i=1}^{2} LnX_i$ را تحت فرض H_0 محاسبه می نماییم

تحت فرض صفر تابع چگالی X را بصورت زیر داریم

$f(x)=x \qquad ۰<x<۱$

در ابتدا تابع چگالی $Z=-LnX$ را محاسبه می کنیم. مقدار X را بر حسب Z می توانیم بصورت زیر داشته باشیم

$$x=e^{-Z} \qquad Z>0$$

$$|J|=\left|\frac{dx}{dz}\right|=\left|-e^{-Z}\right|=e^{-Z}$$

$$f_Z(z)=e^{-z}f_x\left(e^{-z}\right)=e^{-z} \qquad z>0$$

بنابراین تابع چگالی Z را بصورت زیر داریم:

$$f_Z(z)=e^{-z}I_{(0,+\infty)}(z)$$

یعنی $Z\sim E(1)$ می باشد بنابراین

$$Y=-\sum_{i=1}^{2}Z_i\sim Gamma(1,2)$$

بنابراین (*) را می توانیم بصورت زیر داشته باشیم

$$\alpha=P_{H_0}(Y<k)=P(2Y<2k)$$

و با توجه به اینکه اگر $Y\sim Gamma(\alpha,\beta)$ باشد آنگاه

$$\frac{2Y}{\beta}\sim\chi^2(2\alpha)$$

بنابراین

$$\alpha=P\left(\chi^2_{(2)}<2k\right)=1-P\left(\chi^2_{(2)}>2k\right)$$
$$P\left(\chi^2_{(2)}>2k\right)=1-\alpha\Rightarrow 2k=\chi^2_{(2;1-\alpha)}$$

و با توجه به اینکه مقدار $\alpha=\frac{۱}{۲}(۱-Ln(۲))$

$$K=\frac{1}{2}\chi^2_{\left(2;\frac{1}{2}(1+Ln(2))\right)}$$

ب) برای قسمت (ب) می توانیم آماره ی آزمون را بصورت زیر داشته باشیم

$$\phi_{(x)}=\begin{cases}1 & (x_1x_2)>4k(x_1x_2)^2\\ 0 & (x_1x_2)\le 4k(x_1x_2)^2\end{cases}$$

بنابراین

$$\phi_{(x)}=\begin{cases}1 & (x_1x_2)<k_1\\ 0 & (x_1x_2)\ge k_1\end{cases}\quad\rightarrow\quad \phi(x)=\begin{cases}1 & -\sum_{i=1}^{2}Ln(x_i)>c\\ 0 & -\sum_{i=1}^{2}Ln(x_i)\le c\end{cases}$$

با توجه به قسمت الف داریم

$$\alpha=P\left(\chi^2_{(2)}>2K\right)\Rightarrow\qquad 2K=\chi^2_{(2;\alpha)}$$

بنابراین $K=\frac{1}{2}\chi^2_{\left(2;\frac{1}{2}(1-Ln(2))\right)}$

۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمالهای زیر باشد. پر توانترین آزمون سطح α را برای آزمون $H_0:\theta=\theta_0 \quad v.s. \quad H_1:\theta=\theta_1$ بدست آورید.

$$i)\ f_\theta(x)=2\theta x+(1-\theta)\quad 0<x<1\quad,\quad -1\le\theta\le 1$$
$$ii)\ f_\theta(x)=(\theta+1)x^\theta\quad 0<x<1\quad,\quad -1<\theta$$
$$iii)\ f_\theta(x)=\frac{2}{\theta}2(\theta-x)\quad 0<x<\theta\quad,\quad 0<\theta$$
$$iv)\ f_\theta(x)=2\theta x+2(1-\theta)(1-x)\quad 0<x<1\quad,\quad 0\le\theta\le 1$$

$$v)\ f_\theta(x)=\frac{e^{-(x-\theta)}}{\left[1+e^{(x-\theta)}\right]^2} \quad , \quad x\in R,\theta\in R$$

$$vi)\ f_\theta(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad x=0,1 \quad , \quad 0\le\theta\le 1$$

$$vii)\ f_\theta(x)=\frac{1}{\pi(\theta)}x^{\theta-1}e^{-x} \quad 0<x \quad , \quad 0<\theta$$

$$viii)\ f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)} \quad x\ge\theta \quad , \quad 0<\theta$$

$$ix)\ f_\theta(x)=\theta^2xe^{-\theta x} \quad x>0 \quad , \quad 0<\theta$$

$$x)\ f_\theta(x)=\alpha\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad x\in R \quad , \quad \theta>0$$

$$xi)\ f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad 0<x<1 \quad , \quad \theta>0$$

$$xii)\ f_\theta(x)=\frac{1}{6\theta^4}x^3e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x>0 \quad , \quad \theta>0$$

$$xiii)\ f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{1}{2\theta}x^2} \quad x\in R \quad , \quad \theta>0$$

$$xiv)\ f_\theta(x)=2(1-\theta)x+\theta \quad 0<x<1 \quad , \quad 0<\theta<1$$

حل:

i) به ازای $\theta_1>\theta_0$ داریم

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}=\frac{\theta_1(2x-1)+1}{\theta_0(2x-1)+1}=g(x)$$

با مشتق گیری از $g(x)$، نتییجه می شود که تابعی اکیدا صعودی می باشد. در نتیجه براساس لم–نیمن پیرسن داریم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & x\le c\end{cases}$$

بوده و از آنجا که اندازه آزمون برابر α است، داریم

$$\alpha=E_{H_0}(\phi(X))=P_{H_0}(X>c)\Rightarrow 1-[\theta_0c^2+(1-\theta_0)c]=\alpha$$

و از حل معادله بالا می توانیم c مورد نظر را بیابیم.

ii) برای $\theta_1>\theta_0$ و با توجه به حل قسمت (i) خواهیم داشت:

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & x\le c\end{cases}$$

که در آن $C=\sqrt[\theta_0+1]{1-\alpha}$ می باشد.

iii) برای $\theta_1>\theta_0$ خواهیم داشت:

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x>c\\ 0 & x\le c\end{cases}$$

و برای بدست آوردن c چون آزمون در سطح α می باشد بنابراین :

$$\alpha=E_{H_0}(\phi(X))=\int_c^{\theta_0}\frac{2}{\theta_0^2}(\theta_0-x)dx$$

که با انتگرال گیری و حل معادله درجه دوم بالا می توانیم c را بدست آوریم.

بقیه موارد به همین منوال قابل بیان می باشد .

۱۲- فرض کنید Z یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمالهای زیر باشد به آزمون $H_0:Z\sim f_0(z)\quad v.s.\quad H_1:Z\sim f_1(z)$ هستیم

الف) پرتوانترین آزمون سطح $\alpha=0.3$ را بدست آورید .

ب) پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = ۰/۳$ را با آزمونی ، با ناحیه بحرانی $C=\{z_4\}$ مقایسه کنید .

Z	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
$f_0(z)$	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1
$f_1(z)$	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1

حل : چون در این مسئله آزمون به روش درستنمایی برای سطح مورد نظر وجود دارد، آنگاه پرتوانترین آزمون با این آزمون معادل خواهد بود پس داریم :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \lambda(z)<\lambda_0\\ \gamma & \lambda(z)=\lambda_0\\ 0 & \lambda(z)>\lambda_0\end{cases} \qquad \lambda_0 \le 1$$

که در آن $\lambda(z)=\min\left\{1,\frac{f_0(z)}{f_1(z)}\right\}$ می باشد .

Z	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
$f_0(z)$	۰.۲	۰.۳	۰.۱	۰.۳	0.۱
$f_1(z)$	۰. ۳	۰.۱	۰.۳	۰.۲	0.۱
$\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	1
$\min\left\{1,\frac{f_0(z)}{f_1(z)}\right\}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	1

به راحتی می توان دید در سطح $\alpha = ۰/۳$ شاخص آزمون به صورت زیر می باشد .

با توجه به اینکه $\alpha = E_{H_0}(\phi(Z)) = 0/3$ می باشد .

$$\phi_1(z) = \begin{cases} 1 & z = z_1, z_3 \\ 0 & z = z_2, z_4, z_5 \end{cases}$$

ب) پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = ۰/۳$ را محاسبه کردیم

توان آزمون برای سطح $\alpha = ۰/۳$ را به صورت زیر داریم

$$\beta = E_{H_0}(\phi(Z)) = 0.6$$

اما برای ناحیه بحرانی $C = \{z_4\}$ که مقدار $\alpha = 0.3$ مـی باشـد و شـاخص آزمـون آن

$\phi_2(z) = \begin{cases} 1 & z = z_4 \\ 0 & z = z_1, z_2, z_3, z_5 \end{cases}$ است .

توان آزمون آن $\beta = E_{H_1}(\phi(X)) = 0.2$

با توجه به اینکه توان آزمون ϕ_1 بیشتر از توان آزمون ϕ_2 می باشد بنابراین آزمون مبتنـی بر شاخص آزمون ϕ_1 پرتوانتر از ϕ_2 می باشد .

۱۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته بـا تـابع چگـالی احتمالهـای زیـر باشـد .

پرتـوانترین آزمـون سـطح α را بـرای آزمـون $H_. : X \sim f_0 \quad v.s. \quad H_1 : X \sim f_1$ بدست آورید ؟

$$f_0(x)=\begin{cases}4x & 0<x<\frac{1}{2}\\ 4(1-x) & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases} \qquad f_1(x)=1 \qquad 0<x<1$$

حل :

بسادگی می توان تحقیق کرد که $f_0(x)$ را بصورت زیر می توان نوشت .

$$f_0(x)=2-4\left|\frac{1}{2}-x\right| \qquad \left|\frac{1}{2}-x\right|<\frac{1}{2}$$

حال با توجه به لم نیمن – پیرسون داریم :

$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)}<c\Rightarrow 2-4\left|\frac{1}{2}-x\right|<c \qquad \Rightarrow\left|\frac{1}{2}-x\right|>k$$

چون $\left|\frac{۱}{۲}-x\right|=\left|x-\frac{۱}{۲}\right|$ آنگاه

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \left|x-\frac{1}{2}\right|>k\\ 0 & \left|x-\frac{1}{2}\right|<k\end{cases}$$

برای یافتن k بصورت زیر عمل می کنیم :

$$Y=\left|X-\frac{1}{2}\right|\Rightarrow \quad f_Y(y)=4-8y \qquad 0<y<\frac{1}{2}$$

$$\alpha=E_{H_0}(\phi(X))=P_{H_0}\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|>k\right)=p(Y>k)=\int_k^{\frac{1}{2}}(4-8y)dy=1-4k+4k^2$$

$$\frac{1}{4}=\alpha=4k^2-4k+1\Rightarrow k=\frac{1}{4},\frac{3}{4}$$

۱۵- فرض کنید $X \sim E(1)$ اگر $Y = X^{\theta}$ ، پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ را بـرای آزمون $H_1 : \theta = 2 \quad v.s. \quad H_0 : \theta = 1$ بدست آورده و توان آزمون را محاسبه کنیـد ؟

حل :

تابع چگالی X را به صورت زیر داریم

$$f(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$

حال به محاسبه تابع چگالی Y می پردازیم

$$x = y^{\frac{1}{\theta}} \qquad y > 0$$

$$|J| = \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\theta} y^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$f_{\theta}(y) = \frac{1}{\theta} y^{\frac{1}{\theta}-1} e^{-y^{\frac{1}{\theta}}} \qquad y > 0$$

با استفاده از لم نیمن پیرسون خواهیم داشت

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta_1}(y) > k f_{\theta_0}(y) \\ 0 & f_{\theta_1}(y) \le k f_{\theta_0}(y) \end{cases} \Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \ e^{-\frac{1}{2}y} > k e^{-y} \\ & \\ 0 & \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \ e^{-\frac{1}{2}y} \le k e^{-y} \end{cases} \qquad (*)$$

با حل وساده کردن (*)خواهیم داشت

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & y < k_1 \\ 0 & y \ge k_1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\alpha = 0.05$ می باشد بنابراین خواهیم داشت

$$0.05 = E_{H_0}(\phi(Y)) = P_{H_0}(Y < k_1) \Rightarrow k_1 = 0.051$$

۱۷- نشان دهید ، اگر در دستیابی به پرتوانترین آزمون آماره بسنده وجود داشته باشد تابع آزمون تابعی از آماره بسنده است .

حل : با توجه به نسبت درستنمایی در آزمون ها داریم $\lambda = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} f_{\theta_0}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_{\theta_1}(x_i)}$

چون دستیابی به آماره بسنده وجود دارد بنابراین بر اساس قضیه دسته بندی نیمن خواهیم داشت $\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = g\left(T\left(\underset{\sim}{x}\right),\theta\right)h\left(\underset{\sim}{x}\right)$ که $T\left(\underset{\sim}{x}\right)$ آماره بسنده می باشد بنابراین

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} f_{\theta_0}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_{\theta_1}(x_i)} = \frac{g(T(x_1,\dots,x_n),\theta_0)h(x_1,\dots,x_n)}{g(T(x_1,\dots,x_n),\theta_1)h(x_1,\dots,x_n)} = k\left(T\left(\underset{\sim}{x}\right),\theta_0,\theta_1\right)$$

یعنی تابع آزمون تابعی از آماره بسنده می باشد .

۱۸- ٭

۱۹-٭

۲۰-٭

۲۱- فرض کنید $X_1,\dots,X_4$ یک نمونه تصادفی چهارتایی از توزیع $B(1,\theta)$ باشد علاقمند به آزمون زیر هستیم .

$$H_0 = \theta = \frac{1}{4} \qquad v.s. \qquad H_1 = \theta = \frac{1}{2}$$

الف) پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ را بدست آورید .

ب) نمودار $N = \{(\alpha_\varphi, \beta_\varphi^*) : 0 \le \phi \le 1\}$ را رسم کنید .

ج) مکان آزمونهای با اندازه $\alpha = 0.1$ وسطح $\alpha = 0.1$ راروی مجموعه N نمایش دهید .

د) مکان پرتوانترین آزمون اندازه $\alpha = 0.2$ و سطح $\alpha = 0.2$ را روی مجموعه N نمایش دهید.

حل :

شاخص آزمون را بصورت زیر خواهیم داشت :

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) > k \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) \\ \gamma & \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) = k \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) \\ 0 & \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) < k \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 > k \left(\frac{1}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{4} X_i} \left(\frac{3}{4}\right)^{4 - \sum_{i=1}^{4} X_i} \\ \gamma & (\frac{1}{2})^4 = k (\frac{1}{4})^{\sum_{i=1}^{4} x_i} (\frac{3}{4})^{4 - \sum_{i=1}^{4} x_i} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 < k \left(\frac{1}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{4} X_i} \left(\frac{3}{4}\right)^{4 - \sum_{i=1}^{4} X_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x)=\begin{cases} 1 & \left(\frac{4}{9}\right)^4 > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{i=1}^4 X_i} \\ \gamma & (\frac{4}{9})^4 = k(\frac{1}{3})^{\sum_{i=1}^4 x_i} \\ 0 & \left(\frac{4}{9}\right)^4 < k\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{i=1}^4 X_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x)=\begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^4 X_i > [c] \\ \gamma & \sum_{i=1}^4 X_i = [c] \\ 0 & \sum_{i=1}^4 X_i < [c] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(y)=\begin{cases} 1 & y > [c] \\ \gamma & y = [c] \\ 0 & y < [c] \end{cases}$$

برای تعیین مقدار c خواهیم داشت

$$E_{H_0}(\phi(X)) = 0.05$$

از طرفی میدانیم که $Y=\sum_{i=1}^4 X_i \sim Bin(4,\frac{1}{4})$

$$E_{H_0}(\phi(Y)) = 0.05 \Rightarrow P(Y>[c]) + \gamma P(Y=[c]) = 0.05$$

۲۲-فرض کنید $X_1,..,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد.علاقمند به آزمون زیر هستیم

$$H_0:\theta=-\frac{1}{2} \quad v.s. \quad H_1:\theta=\frac{1}{2}$$

الف)کوچکترین n را بیابید که پرتوانترین آزمون با $\beta \leq 0.05, \alpha \leq 0.05$ وجود داشته باشد.

ب)به ازاء چه مقادیری از α آزمون نسبت درستنمایی وجود ندارد.

حل:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) > k \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) \\ \\ 0 & \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i) \leq k \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} X_i > k_1 \\ \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} X_i \leq k_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \overline{X} > c \\ \\ 0 & \overline{X} \leq c \end{cases}$$

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(X)) = P_{H_0}(\overline{X} > c) = P(Z > \sqrt{n}(c + \frac{1}{2}))$$

چون آزمون در سطح 0.05 می باشد بنابراین

$$P(Z > \sqrt{n}(c+\frac{1}{2})) \le 0.05$$

$$\Rightarrow P(Z > \sqrt{n}(c+\frac{1}{2})) \le P(Z > 1.64) \Rightarrow \{Z > \sqrt{n}(c+\frac{1}{2}) \subseteq \{Z > 1.64\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(c+\frac{1}{2}) > 1.64 \qquad (*)$$

$$\beta = E_{H_1}(1-\phi(X)) = P_{H_1}(\overline{X} \le c) = P(Z \le \sqrt{n}(c-\frac{1}{2}))$$

$$\Rightarrow P(Z \le \sqrt{n}(c-\frac{1}{2})) \le 0.05$$

$$\Rightarrow P(Z < \sqrt{n}(c-\frac{1}{2})) \le P(Z \le -1.64) \Rightarrow \{Z < \sqrt{n}(c-\frac{1}{2})\} \subseteq \{Z < -1.64\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(c-\frac{1}{2}) < -1.64 \qquad (**)$$

از (*) و (**) خواهیم داشت:

$$n \ge 10.75 \Rightarrow n \ge 11$$
$$c \ge \frac{1.64}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}$$

ب)

$$g(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$P_{H_0}(\lambda(X)=1) = P_{H_0}(g(X) \ge 1) = P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 0)$$

$$= P_{H_0}(\overline{X} \le 0) = P(Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}) = P(Z \le 1.658) = P_0$$

در نتیجه $P_{H_0}(\lambda(X) < 1)$. بنابراین آزمون نسبت درستنمای با سطح α در فاصله (p_0 و۱) برای آزمون فوق وجود ندارد.

۲۳ـ فرض کنید X یک متغیرتصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد. علاقمند به آزمون زیرهستم .

$$H_0 = f = f_0 \qquad v.s. \qquad H_1 = f = f_1$$

الف) پرتوانترین آزمون سطح $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.1$ رابدست آورید .

ب) نمودار $N = \{(\alpha_\varphi, \beta^*_\phi) : 0 \le \phi \le 1\}$ را رسم کنید.

ج) به ازای چه مقادیری از α آزمون به روش نسبت درستنمایی وجود ندارد ؟

حل :

i) با استفاده ازروش آزمون نسبت درستنمایی جدول زیر را خواهیم داشت .

X	۱	۲	۳	۴	۵
$g(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}$	۰/۴	۰/۵	۱/۳	۱/۰۶	۱/۶
$\lambda = \min\{1, g(x)\}$	۰/۴	۰/۵	۱	۱	۱

و در سطح $\alpha = 0.05$ خواهیم داشت .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & X = 1 \\ \gamma & X = 2 \\ 0 & X = 3 \end{cases}$$

ii)

X	x_1 x_2 x_3 x_4
$g(x)$	۱ ۲ ۰/۵ ۱/۵
$\lambda(x) = \min\{1, g(x)\}$	۱ ۱ ۰/۵ ۱

در سطح $\alpha = 0/1$ خواهیم داشت:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & X = 1 \\ \gamma & X = 2 \\ 0 & X = 3 \end{cases}$$

۲۴-فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = 2^{-(x+\theta)} \qquad , x = 1-\theta, 2-\theta, \ldots$$

پـر تـوانترین آزمـون انـدازه $\alpha = 0.02$ را بـرای آزمـون $H_0 : \theta = 0$ در مقابـل $H_0 : \theta = 1$ به دست آورید.

حل: با توجه به لم نیمن – پیرسون خواهیم داشت :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2}\frac{I_{\{0,1,2,..\}}(x)}{I_{\{1,2,...\}}(x)} > k \\ \gamma & \frac{1}{2}\frac{I_{\{0,1,2,..\}}(x)}{I_{\{1,2,...\}}(x)} = k \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{I_{\{0,1,2,..\}}(x)}{I_{\{1,2,...\}}(x)} < k \end{cases}$$

بنابراین :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & X > [c] \\ \gamma & X = [c] \\ 0 & X < [c] \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\alpha = E_{H_0}(\phi(X))$ خواهیم داشت

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & X>6\\ 0.28 & X=6\\ 0 & X<7\end{cases}$$

۲۵-فرض یک X دارای توزیع وایبل با پارامترهای c, ۱ با تابع چگالی احتمان زیر می باشد

$$f_c(x)=cx^{c-1}e^{-x^c} \quad ,x>0,c>0$$

علاقمند به آزمون زیر در سطح $\alpha=0.1$ هستیم.

$$H_0:c=1 \quad v.s. \quad H_1:c=2$$

پرتوانترین آزمون اندازه $\alpha=0.01$ را بدست آورید.

حل :

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}>k\\ \\ 0 & \dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}<k\end{cases} \Rightarrow \phi(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{2xe^{-x^2}}{e^{-x}}>k\\ \\ 0 & \dfrac{2xe^{-x^2}}{e^{-x}}<k\end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x)=\begin{cases}1 & 2xe^{-x^2+x}>k\\ \\ 0 & 2xe^{-x^2+x}<k\end{cases}$$

با مشتق گیری از $g(x)=2xe^{-x^2+x}$ خواهیم دید کـه اگـر $x<c<1$ در نظـر گرفتـه شود آن گاه مشتق همواره صعودی است چونکه:

$$y' = 2e^{-x^2+x}[-2x^2 + x + 1]$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} 1 & \text{ق.ق} \\ -\frac{1}{2} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

و تابع مشتق همواره برای x<1 صعودی اسـت، در نتیجـه بـرای x<c همـواره تـابع صعودی است بنابراین

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < c \\ 0 & x > c \end{cases}$$

$$\alpha = E_{H_0}(\phi(x)) = P_{H_0}(X < c) = \int_0^c e^{-x} dx = 0.01$$

$$1 - e^{-c} = 0.01 \Rightarrow c = -Ln(0.99) = 0.01$$

۲۶-فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته با توابع امتحان زیرباشد

x	1	2	3	4
f_0(x)	1/7	2/7	1/7	3/7
f_1(x)	3/8	1/8	1/8	3/8

علاقمند به آزمون زیر هستیم :

$$H_0 : f = f_0 \quad v.s. \quad H_1 : f = f_1$$

الف) پرتوانترین آزمون سطح α را به دست آورید

ب) نمودار $N = \{(\alpha_\phi, \beta_\phi^*) : 0 \le \phi \le 1\}$ را رسم کنید

ج) تابع آزمون پرتوانترین آزمون اندازهٔ ۰/۲ را بدست آورید

د) توابع آزمون زیر را در نظر بگیرید

$$\phi_1^{**}(x)=\begin{cases}1 & x=1,3\\ 0 & x=2,4\end{cases} \quad , \quad \phi_2^{**}(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ \frac{1}{4} & x=3,4\\ 0 & x=2\end{cases}$$

اندازهٔ هریک را بدست آورید آیا تابع آزمون های داده شده پر توان ترین آزمون اندازهٔ خود هستند؟ چرا ؟

حل :

الف و ب) فرض کنید ؛ $\alpha_1=\frac{3}{7}$ آنگاه سه آزمون غیر تصادفی وجود دارد، کـه بنـابر لـم نیمن – پیرسن هرکدام که توان بیشتری داشته باشند را انتخاب می کنیم یعنی

$$\phi_1(x)=\begin{cases}1 & x=2,3\\ 0 & x=1,4\end{cases}$$

اکنون $\alpha_2=\frac{2}{7}$ را انتخاب می کنیم، در این حالت دو آزمون غیر تصادفی وجود دارد که پرتوانترین آزمون برابر است با :

$$\phi_2(x)=\begin{cases}1 & x=2\\ 0 & x=1,3,4\end{cases}$$

در ادامه $\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$ را انتخاب کنبد در این حالت باید از آزمون غیر تصادفی استفاده کنیم در نتیجه داریم :

$$\phi_3(x)=\begin{cases}1 & x=2\\ \gamma & x=3\\ 0 & x=1,4\end{cases}$$

که در آن $\gamma=\dfrac{\alpha_3-\frac{2}{7}}{\frac{1}{7}}$. در نهایت با پیدا کردن این توابع آزمون، N را می توان رسم کرد.

ج)

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & x=3\\ 0.2 & x=2\\ 0 & x=1,4\end{cases}$$

د)

$$\alpha_1=E_{H_0}(\phi_1^{**}(X))=P_{H_0}(X=1,3)=P_{H_0}(X=1)+P_{H_0}(X=3)=\frac{2}{7}$$

$$\alpha_2=E_{H_0}(\phi_2^{**}(X))=P_{H_0}(X=1)+\frac{1}{4}[P_{H_0}(X=3)+P_{H_0}(X=4)]=\frac{2}{7}$$

$$\beta_1^*=E_{H_1}(\phi_1^{**}(X))=P_{H_1}(X=1,3)=\frac{1}{2}$$

$$\beta_2^*=E_{H_1}(\phi_2^{**}(X))=P_{H_1}(X=1)+\frac{1}{4}[P_{H_1}(X=3)+P_{H_1}(X=4)]=\frac{1}{2}$$

با توجه به مقادیر β_2^*,β_1^* هر دو دارای یک توان می باشند و می تـوان گفـت در انـدازهٔ خود پرتوان ترین آزمون می باشند.