حل مسائل فصل ۵

۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(1,\theta)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا، برآورد گر بیز $\theta$ را بدست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کیند؟

حل : با توجه به اینکه $X_i \sim E(1,\theta)$ و توزیع پیشین $E(1)$ می باشد در نتیجه

$$f(x_i;\theta)=\theta e^{-\theta(x_i-1)} \qquad x_i \geq 1, \theta>0$$

$$f(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}$$

$$g(\theta)=e^{-\theta} \qquad \theta>0$$

آنگاه برای تابع چگالی پسین داریم :

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) \propto \theta^n e^{-\theta(n\bar{x}-n)}$$

$$g(\theta) \propto e^{-\theta}$$

$$g(\theta \mid \underset{\sim}{x}) \propto f(\underset{\sim}{x};\theta) g(\theta)=\theta^n e^{-\theta(n\bar{x}-(n-1))}$$

در نتیجه

$$\theta \Big| \underset{\sim}{x} \sim Gamma(n+1, n\bar{x}-(n-1))$$

چون تابع زیان مربع خطا می باشد، بنابراین براورگر بیز را بصورت زیر داریم:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X})=E\left(\theta \Big| \underset{\sim}{X}\right)=\frac{n+1}{n\bar{X}-(n-1)}$$

برای محاسبه تابع مخاطره بیزی کافی است که $r(G,\delta)=E\{E[L(\theta,\delta)]\}$ را محاسبه کنیم .

۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $\Gamma(\alpha,\beta)$ و تابع زیان مربع خطا، برآورد گر بیز $\lambda$ را بدست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید؟

حل:

با توجه به حل سؤال ۵ داریم:

$$f(\underset{\sim}{x};\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$g(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\lambda^{\alpha-1}e^{\frac{\lambda}{\beta}}\qquad \lambda>0$$

$$g\left(\lambda\middle|\underset{\sim}{x}\right)\propto\lambda^{\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i-1}e^{-\lambda\left(n+\frac{1}{\beta}\right)}$$

بنابراین توزیع پسین را بصورت زیر داریم

$$\lambda\Big|\underset{\sim}{x}\sim Gamma\left(\alpha+n\bar{x},\mathrm{n}+\frac{1}{\beta}\right)$$

ولذا برآوردگر بیز $\frac{1}{\lambda}$ را با توجه به توزیع پیشین داده شده به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X})=\mathrm{E}\left(\lambda\middle|\underset{\sim}{X}\right)=\frac{\left(\alpha+n\overline{X}\right)\beta}{1+n\beta}$$

در نتیجه برای تابع مخاطره بیزی داریم :

$$R(\lambda,\delta)=E\{L[\lambda,\delta(\underset{\sim}{X})]\}=E\{\delta_g(\underset{\sim}{X})-\lambda\}^2=\frac{(\alpha+\lambda)\beta}{1+n\beta}+\{\frac{(\alpha+n\lambda)\beta}{1+n\beta}-\lambda\}^2$$

$$\Rightarrow r(G,\delta)=E\{R(\lambda,\delta)\}=E\left\{\frac{(\alpha+\lambda)\beta}{1+n\beta}+\{\frac{\alpha\beta}{1+n\beta}-\frac{\lambda}{1+n\beta}\}^2\right\}=\frac{(\alpha+\alpha\beta)\beta}{1+n\beta}+\frac{\alpha\beta^2}{(1+n\beta)^2}$$

$$\Rightarrow r(G,\delta)=\frac{\alpha\beta}{(1+n\beta)^2}(1+(n+2)\beta+n\beta^2)$$

۷- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد با انتخاب توزیع پیشین $U(0,1)$ و تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $W(\theta)=\theta^2$، برآوردگر بیز $\theta$ را بدست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید؟

$$f(x;\theta)=\frac{2x}{\theta^2}\qquad 0<\mathrm{x}<\theta,\ \theta>0$$

حل: داریم ؛

$$f(x;\theta)=\frac{2x}{\theta^2}\quad u(\theta-\mathrm{x})$$

$$g(\theta)=1\qquad u(1-\theta)$$

بنابراین برای تابع چگالی پسین خواهیم داشت:

$$g(\theta|x) \propto f(x;\theta)g(\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \quad u(\theta - \mathrm{x}) \quad u(1-\theta)$$
$$\Rightarrow g(\theta|x) = cf(x;\theta)g(\theta)$$

که در آن c یک ثابت مثبتی است که به $\theta$ بستگی ندارد. اکنون برآورد بیز را محاسبه می کنیم.

$$\delta_g(X) = \frac{\mathrm{E}(w(\theta)\theta|X=x)}{\mathrm{E}(w(\theta)|X=x)} = \frac{\mathrm{E}(\theta^3|X)}{\mathrm{E}(\theta^2|X)} = \frac{\int_x^1 2\theta x d\theta}{\int_x^1 2x d\theta} = \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1+X}{2}$$

تابع مخاطره بیزی به سادگی قابل محاسبه است. طبق حل تمرین قبل داریم :

$$R(\theta,\delta) = E\{L[\theta,\delta(X)]\} = E\{\theta^2(\delta_g(X)-\theta)^2\} = \frac{1}{72}\theta^4 + \theta^2\left\{\frac{1+\frac{2\theta}{3}}{2} - \theta\right\}^2$$

$$\Rightarrow r(G,\delta) = E\{R(\lambda,\delta)\} = E\left\{\frac{1}{72}\theta^4 + \frac{\theta^2}{36}\{3-4\theta\}^2\right\} = \frac{1}{72\times 5} + \frac{1}{36}\left\{3 - 6 + \frac{16}{5}\right\}$$

$$\Rightarrow r(G,\delta) = \frac{1}{5\times 72} + \frac{1}{36}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{5\times 72} = \frac{1}{120}$$

۸- فرض کنید $\mathrm{X}_1,...,\mathrm{X}_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. با انتخاب تابع چگالی احتمال پیشین متناسب با $\theta^{-\alpha}$، $1<\theta<\infty$ , $\alpha>1$، تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$،برآوردگر بیز $\theta$ را بدست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید؟

حل:از آنجا که

$$f(\mathrm{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^{-n} \quad u(\theta - \mathrm{x}_{(\mathrm{n})})$$

و

$$g(\theta) \propto \theta^{-\alpha} \quad \theta > 1$$

آنگاه برای توزیع پسین داریم:

$$g(\theta|x) \propto \theta^{-n-\alpha} \qquad \theta > 1, \quad u(\theta - \mathrm{x}_{(\mathrm{n})})$$

و یا

$$g(\theta|x)=c\,\theta^{-(n+\alpha)} \qquad \theta>1,\ \ u(\theta - \mathrm{x}_{(\mathrm{n})})$$

که در آن c ثابت معینی می باشد.

برای محاسبه برآورد بیز دو حالت در نظر می گیریم:

الف) اگر $x_n \le 1$ آنگاه

$$\delta_g(\underset{\sim}{X})=\frac{\mathrm{E}\left(w(\theta)\theta \middle| \underset{\sim}{X}\right)}{\mathrm{E}\left(w(\theta) \middle| \underset{\sim}{X}\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{E}\left(\frac{1}{\theta}\middle|\underset{\sim}{X}\right)}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{\theta^2}\middle|\underset{\sim}{X}\right)}=\frac{\int_1^{+\infty}\theta^{-(n+\alpha+1)}d\theta}{\int_1^{+\infty}\theta^{-(n+\alpha+2)}d\theta}=\frac{n+\alpha+1}{n+\alpha}$$

ب) اگر $\mathrm{X}_n>1$

برآوردگر بیز را بصورت زیر داریم:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X})=\frac{\int_{X_{(n)}}^{+\infty}\theta^{-(n+\alpha+1)}d\theta}{\int_{X_{(n)}}^{+\infty}\theta^{-(n+\alpha+2)}d\theta}=\frac{n+1+\alpha}{n+\alpha}X_{(n)}$$

۹- فرض کنید $\mathrm{X}_1,...,\mathrm{X}_n$ یک نمونه تصادفی n تایی ازتوزیع $Ge(\theta)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $U(0,1)$وتابع زیان مربع خطا،برآوردگر بیز $\theta$ را بدست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید؟

حل: تابع چگالی X را بصورت زیر داریم

$$f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^x \qquad \mathrm{x}=0,1,... \ \ ;0<\theta<1$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$g(\theta)=1 \qquad u(1-\theta)$$

بنابراین

$$g(\theta|\underset{\sim}{x}) \propto f(\underset{\sim}{x};\theta)g(\theta) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} u(1-\theta)$$

پس تابع چگالی توزیع پسین بصورت زیرخواهد بود:

$$\theta \mid \underset{\sim}{x} \sim \mathrm{Beta}\left(\mathrm{n}+1, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} + 1\right)$$

که سرانجام برآوردگر بیزرا بر اساس توزیع پیشین داده شده وتابع زیان مربع خطا به این صورت خواهیم داشت:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X}) = E(\theta|\underset{\sim}{X}) = \frac{n+1}{n+\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}$$

۱۰- فرض کنید $\mathrm{X}_1,...,\mathrm{X}_n$ یک نمونه تصادفی n تایی ازتوزیع $\mathrm{P}(\lambda)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $\mathrm{E}(1)$ وتابع زیان مربع خطا،برآوردگر بیز $\gamma(\lambda) = e^{-\lambda}$ را بدست آورید؟

حل: داریم

$$f(\underset{\sim}{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = (\prod_{i=1}^{n} x_i!)^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_i}$$
$$g(\lambda) = e^{-\lambda} \quad \lambda > \circ$$
$$g(\lambda|\underset{\sim}{\mathrm{x}}) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{n}\overline{\mathrm{x}}} e^{-\lambda(n+1)}$$

بنابراین برای توزیع پسین داریم

$$\lambda|\underset{\sim}{x} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{n}\overline{\mathrm{X}}+1, \mathrm{n}+1)$$

اکنون برآوردگر بیز رامحاسبه می کنیم:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{E}(\gamma(\lambda) \mid \underset{\sim}{X} = x) = \mathrm{E}(e^{-\lambda} \mid \underset{\sim}{X})$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{1}{\Gamma(n\bar{x}+1)} (n+1)^{n\bar{x}+1} \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(n+1)} d\lambda$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}\bar{\mathrm{x}}+1)} (n+1)^{n\bar{x}+1} \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(\mathrm{n}+2)}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}\right)^{n\bar{X}+1}$$

۱۱- فرض کنید $\mathrm{X}_1,...,\mathrm{X}_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $\mathrm{E}(\lambda)$ باشد با انتخاب توزیع پیشین $\mathrm{E}(1)$ وتابع زیان مربع خطا ،برآوردگر بیز $\lambda$ را بدست آورده وتابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید ؟

حل : داریم

$$f(\underset{\sim}{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \lambda^{\mathrm{n}}\ e^{-\lambda \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_i}$$

$$g(\lambda) = e^{-\lambda} \quad \lambda > \circ$$

$$g(\lambda | \underset{\sim}{\mathrm{x}}) \propto \lambda^{\mathrm{n}}\ e^{-\lambda(n\bar{x}+1)}$$

بنابراین

$$\lambda | \underset{\sim}{x} \sim \mathrm{Gamma}(\mathrm{n}+1, \mathrm{n}\bar{\mathrm{x}}+1)$$

در نتیجه برآورد بیز پارامتر $\lambda$ با توجه به توزیع پیشین داده شده بصورت زیر می باشد .

$$\delta_g(\mathrm{X}) = \frac{n+1}{1+n\bar{X}}$$

۱۲- فرض کنید بدانیم $\theta$ نسبت محصولات معیوب یک کارخانه برابر ۰/۱ یا ۰/۲ است .اگر تابع احتمال پیشین بصورت

$$1 - p(\theta = 0/2) = p(\theta = 0/1) = 0/7$$

انتخاب شود واز هشت محصول به تصادف انتخاب شده از محصول این کارخانه دقیقاً ۲محصول معیوب مشاهده شود ،تابع احتمال پسین $\theta$ رابدست آورید ؟

حل :

متغیرتصادفی X راتعداد محصولات معیوب دریک نمونه ۸ تایی تعریف می کنیم، می دانیم $X \sim B(8,\theta)$ توزیع پیشین $\theta$ برابر است با

| $\theta$ | ۰/۱ | ۰/۲ |
|---|---|---|
| $g(\theta)$ | ۰/۷ | ۰/۳ |

اکنون توزیع پسین $\theta$ رابدست می آوریم . فرض کنید $f(x)$ توزیع حاشیه ای X باشد .

$$g(\theta \mid x=2) = \frac{p(x=2)g(\theta)}{f_X(2)} = \frac{\theta^2(1-\theta)^6 g(\theta)}{(0.1)^2(0.9)^6(0.7)+(0.2)^2(0.8)^6(0.3)}$$

بنابراین باجایگذاری $\theta = 0.1$ و $\theta = 0.2$ داریم

$g(\theta = 0.1 \mid \mathrm{X} = 2) \approx 0.54$

$g(\theta = 0.2 \mid X = 2) = 1 - g(\theta = 0.1 \mid X = 2) = 1 - 0.54 = 0.46$

لذا توزیع پسین رابه صورت زیرداریم

| $\Theta = \theta$ | ۰/۱ | ۰/۲ |
|---|---|---|
| $g(\theta \mid X = 2)$ | ۰/۵۴ | ۰/۴۶ |

۱۳- فرض کنید بدانیم $\theta$ نسبت محصولات معیوب یک کارخانه دارای توزیعی باچگالی احتمال زیر است .

اگر دریک نمونه تصادفی n تایی ،سه محصول معیوب مشاهده شود توزیع پسین $\theta$ را بدست آورید؟

$g(\theta) = 2(1-\theta) \qquad \circ < \theta < 1$

حل : متغیر تصادفی X راتعداد محصولات معیوب دریک نمونه n تایی تعریف می کنیم ، از طرفی $X \sim Bin(n,\theta)$ و

$g(\theta) = 2(1-\theta)\, u(1-\theta)$

بنابراین

$$g(\theta \mid x) \propto \theta^{x}(1-\theta)^{n-x+1}u(1\text{-}\theta)$$

آنگاه توزیع پسین برای یک نمونه n تایی برابر می باشد با :

$$\theta \mid x \sim Beta(x+1, n-x+2)$$

وباتوجه به صورت مسأله که سه محصول معیوب مشاهده شده، پس توزیع پسین بصورت $Beta(4, n-1)$ است .

۱۴- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\theta,1)$ باشد باانتخاب توزیع پیشین $\Gamma(\alpha,\beta)$ ،میانگین و واریانس توزیع پسین رابدست آورید؟

حل: داریم

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^{n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}} \qquad \theta > \circ$$

درنتیجه برای توزیع پسین داریم ؛

$$g(\theta \mid x) \propto \theta^{\mathrm{n}+\alpha\text{-}1}\mathrm{e}^{\text{-}\theta(\frac{1}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}Lnx_i)}$$

لذا

$$\theta \mid x \sim Gamma(n+\alpha, \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} Lnx_i)$$

باتوجه به اینکه اگر $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$ باشد آنگاه داریم

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

بنابراین میانگین توزیع پسین

$$\mathrm{E}(\theta \mid X = x) = \frac{\beta(n+\alpha)}{1-\beta\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} Lnx_i}$$

و واریانس توزیع پسین

$$Var(\theta \mid X=x)=\frac{\beta^2(n+\alpha)}{(1-\beta\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Lnx_i})^2}$$

مي باشد

۱۵- فرض کنید $\theta$ نسبت سیبهای خراب یک باغدار باشد اگر توزیع پیشین $Beta(3,4)$ توزیع مناسبی باشد ودریک نمونه تصادفی ۱۰ تایی سه سیب خراب مشاهده شود ،براورد بیز $\theta$ راتحت تابع زیان مربع خطا بدست آورید؟

حل :

متغیر تصادفی X راتعداد سیبهای خراب دریک نمونه ۱۰ تایی تعریف می کنیم در نتیجه $X \sim B\mathrm{in}(10,\theta)$ ، آنگاه

$$g(\theta)\propto\theta^2(1-\theta)^3$$

بنابراین

$$g(\theta \mid x)\propto\theta^{x+2}(1-\theta)^{13-x}$$

پس توزیع پسین رابصورت زیر خواهیم داشت

$$\theta \mid x \sim Beta(x+3,14-x)$$

که برآورد بیزپارامتر $\theta$ تحت توزیع پیشین ارائه شده وتابع زیان مربع خطا بصورت

$$\mathrm{E}(\theta \mid X)=\frac{X+3}{X+3+14-X}=\frac{X+3}{17}$$

می باشد ، چون $X=3$ مشاهده شده است پس

$$\mathrm{E}(\theta \mid X=3)=\frac{6}{17}$$

16- فرض کنید $X \sim U(0,\theta)$ و $\theta \sim \Gamma(2,1)$ شد.براوردگر بیز $\theta$ را تحت تابع زیانهای مربع خطا و قدر مطلق خطا به دست آورید.

حل: با توجه به صورت مسئله داریم ؛

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}u(\theta-x)$$

$$g(\theta)=\theta.e^{-\theta} \qquad \theta>0$$

بنابراین

$$g(\theta\,|\,x)\propto e^{-\theta}u(\theta-x)\Rightarrow \pi(\theta\,|\,x)=ce^{-\theta}u(\theta-x)$$

با استفاده از $\int_x^{+\infty} g(\theta\,|\,x)d\theta=1$ مقدار c ، برابر $c=e^x$ خواهد شد.

بنابراین توزیع پسین را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\theta\,|\,x\sim E(x,1)$$

برای براودگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا داریم:

$$\delta_g(X)=E(\theta\,|\,X)=1+X$$

می دانیم که براوردگر بیز تحت تابع زیان قدرمطلق خطا ، برابر میانه توزیع پسین می باشد لذا:

$$\frac{1}{2}=\int_X^m e^{-(\theta-x)}d\theta=1-e^{X-m}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_g(X)=m=X+Ln2$$

17- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفیn تایی از $U(0,\theta)$ توزیع باشد.اگر تابع چگالی احتمال پیشین به صورت زیر باشد:

$$g(\theta)=\theta^{-2},\theta\geq 1$$

الف)تحت تابع زیانهای مربع خطا و قدرمطلق خطا،برآوردگرهای بیز را به دست آورید.

ب)برای n=4 و مقادیر مشاهده ۰/۴،۰/۶، ۰/۸و۰/۹برآوردهای بیزی را محاسبه کنید.

حل: با توجه به صورت مسئله داریم ؛

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^{-n}u(\theta-x_{(n)})$$

در نتیجه تابع چگالی پسین برابر است:

$$g(\theta\,|\,\underset{\sim}{x})\propto\theta^{-n-2}u(\theta-x_{(n)})u(\theta-1)$$

یا

$$g(\theta | \underset{\sim}{x}) = c\theta^{-n-2}u(\theta - x_{(n)})u(\theta - 1)$$

حال برای محاسبه براوردگر بیز دو حالت را در نظر می گیریم :

حالت اول:اگر $0 < x_{(n)} \leq 1$

حالت دوم :اگر $x_{(n)} > 1$

حالت اول :

برای حالت اول مقدار c را به صورت زیر داریم:

$$\int_{1}^{+\infty} g(\theta | \underset{\sim}{x}) d\theta = 1 \Rightarrow c = n+1$$

بنابراین براوردگر بیز با تابع زیان مربع خطا و قدرمطلق خطا با توزیع پیشین داده شده را به ترتیب بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X}) = E(\theta | \underset{\sim}{X}) = \int_{1}^{+\infty} (n+1)\theta^{-n-2} d\theta = \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{2} = \int_{1}^{m} (n+1)\theta^{-n-2} d\theta \Rightarrow \delta_g(\underset{\sim}{X}) = m = \sqrt[n+1]{2}$$

حالت دوم : $x_{(n)} > 1$را در نظر می گیریم:

در اینجا مقدار c برابر $c = (n+1)x_{(n)}^{n+1}$ بدست می آید،

بنابراین براوردگرهای بیز را به صورت زیر داریم:

$$\delta_g(\underset{\sim}{X}) = E(\theta | \underset{\sim}{X}) = \int_{X_{(n)}}^{+\infty} (n+1)X_{(n)}^{n+1}\theta^{-n-2} d\theta = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

و نیز میانه توزیع پسین براوردگر بیز تحت تابع زیان قدرمطلق خطا را خواهد داد:

$$\frac{1}{2} = \int_{X_{(n)}}^{m} (n+1)X_{(n)}^{n+1}\theta^{-n-2} d\theta = 1 - X_{(n)}^{n+1} m^{-n-1} \Rightarrow \delta_g(\underset{\sim}{X}) = m = \sqrt[n+1]{2} X_{(n)}$$

ب)چون $X_{(n)}=0.9$ کمتر از یک است ، با استفاده از حالت اول،براوردگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا $\frac{5}{4}=1.25$ و براورد بیز تحت قدرمطلق خطا $\sqrt[5]{2}\approx 2.23$ است.

۱۸- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی ازتوزیع $Bin(n,\theta)$ باشد باانتخاب توزیع پیشین $U(0,1)$ وتابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $W(\theta)=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$ برآوردگر بیز $\theta$ وتابع مخاطره بیزی رابدست آورید ؟

حل :

داریم

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{n-x_i}\right]=\left[\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\right]\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

و

$$g(\theta)=1\times u(1-\theta)$$

بنابراین

$$g(\theta\mid\underset{\sim}{x})\propto\theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n^2-n\bar{x}}$$

پس

$$\theta\mid\underset{\sim}{x}\sim Beta(n\bar{x}+1,n(n-\bar{x})+1)$$

بنابراین برآوردگر بیز را برای $\theta$ با تابع زیان مربع خطای وزني بصورت زیر داریم

$$\delta_g(X)=\frac{E\left[\frac{1}{\theta(1-\theta)}\theta\mid X\right]}{E\left(\frac{1}{\theta(1-\theta)}\mid X\right)}=\frac{\int_0^1\theta^{n\bar{X}}(1-\theta)^{n(n-\bar{X})-1}d\theta}{\int_0^1\theta^{n\bar{X}-1}(1-\theta)^{n(n-\bar{X})-1}d\theta}$$

$$=\frac{Beta(n\bar{X}+1,n(n-\bar{X}))}{Beta(n\bar{X},n(n-\bar{X}))}=\frac{\bar{X}}{n}$$

۱۹- فرض کنید $X \sim E(\theta)$ وبدانیم $\theta \in \{1,2,3\}$ باانتخاب توزیع پیشین یکنواخت وتابع زیان مربع خطا ،برآوردگر بیز $\theta$ رابدست آورید ؟

حل :

باتوجه به صورت مسئله دایم :

$$f(x;\theta) = \theta\, e^{-\theta x} \qquad x > 0 \,, \theta > 0$$

$$g(\theta) = \frac{1}{3} \quad \theta = 1,2,3$$

ابتدا توزیع پسین رامحاسبه می کنیم

$$g(\theta \mid x) = \frac{f(x)g(\theta)}{f_X(x)} = \frac{f(x;\theta)g(\theta)}{\sum_{\theta=1}^{3} f_\theta(x) g(\theta)} = \frac{\frac{1}{3}\theta e^{-\theta x}}{\frac{1}{3}\left[e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x}\right]} \qquad \theta = 1,2,3$$

$$\Rightarrow g(\theta \mid x) = \frac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x}} \qquad \theta = 1,2,3$$

برآوردگر بیز با تابع مربع خطا و توزیع پیشین یکنواخت برابر است با :

$$\delta_g(X) = E(\theta \mid X) = \sum_{\theta=1}^{3} \frac{\theta^2 e^{-\theta X}}{e^{-X} + 2e^{-2X} + 3e^{-3X}} = \frac{e^{-X} + 4e^{-2X} + 9e^{-3X}}{e^{-X} + 2e^{-2X} + 3e^{-3X}}$$

$$= \frac{1 + 4e^{-X} + 9e^{-2X}}{1 + 2e^{-X} + 3e^{-2X}}$$

۲۰- فرض کنید $X \sim Ge(\theta)$ و بدانیم $P\left(\theta = \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} = 1 - P(\theta = 1)$ . تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر بیز $\theta$ را بدست آورید؟

حل:

داریم

$$f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x} \qquad \mathrm{x}=1,2,\ldots$$

در نتیجه توزیع پسین برابر است با:

$$g(\theta|x)=\frac{f(x;\theta)g(\theta)}{f(x)}=\frac{f(x;\theta)g(\theta)}{\sum_{\theta} f(x;\theta)g(\theta)}$$

دو حالت در نظر می گیریم:

الف) ابتدا فرض می کنیم $x=0$ باشد پس $f(0)=\theta$ و

$$g(\theta|X=0)=\frac{\theta g(\theta)}{\sum_{\theta}\theta g(\theta)}$$

حال $\sum_{\theta}\theta\pi(\theta)$ را محاسبه می کنیم:

$$\sum_{\theta}\theta g(\theta)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=\frac{2}{12}+\frac{1}{3}=\frac{2+4}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

و در آخر توزیع پسین را بر اساس اینکه $X=0$ محاسبه می کنیم .

| $\theta$ | $\frac{1}{4}$ | ۱ |
|---|---|---|
| $g(\theta\|X=0$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

بنابراین برآوردگر بیز $\theta$ را در حالتی که $X=0$ باشد بصورت زیر داریم.

$$\delta_{g}(0)=\mathrm{E}(\theta|X=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}+=\frac{3}{4}$$

ب) فرض می کنیم $X>0$ باشد پس

$$g(\theta|x)=\frac{\theta(1-\theta)^{x}g(\theta)}{\sum_{\theta}\theta(1-\theta)^{x}g(\theta)}=\frac{\theta(1-\theta)^{x}g(\theta)}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+\frac{2}{3}}\Rightarrow\pi(\theta|x)=6(\frac{4}{3})^{x}\theta(1-\theta)^{x}\pi(\theta)$$

در نهایت برای حالی که $X>0$ داریم :

| $\theta$ | $\frac{1}{4}$ | ۱ |
| --- | --- | --- |
| $g(\theta \vert X)$ | ۱ | 0 |

پس برآوردگر بیز به ازای $X > 0$ و تابع زیان مربع خطا وتابع پیشین داده شده برابر است با:

$$\delta_g(X) = \mathrm{E}(\theta|X) = \frac{1}{4} \qquad x > 0$$